Dreapta în spaţiu

November 22, 2010

1 Dreapta în spaţiu

O dreaptă în spaţiu este caracterizată de un punct şi o direcţie. Direcţia este dată de un vector coliniar cu dreapta, notat în general cu $\overline{a}$ şi numit *vector director*.

În reperul $\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ vectorul director se exprimă:

$$\overline{a} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}.$$

1.1 Dreapta care trece printr-un punct $M_0(\overline{r_0})$ şi are direcţia dată de un vector $\overline{a}$

Propoziţie. Orice dreaptă este caracterizată de o ecuaţie de forma:

$$d : \overline{r} \times \overline{a} = \overline{b}, \tag{1}$$

unde $\overline{a}$ este vectorul director al dreptei, $\overline{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct oarecare de pe dreaptă iar $\overline{b}$ este un vector perpendicular pe $\overline{a}$.

Într-adevăr, deoarece M_0 şi M aparţin dreptei d şi vectorul $\overline{a}$ este paralel cu dreapta d, rezultă că $\overline{M_0M}$ şi $\overline{a}$ sunt vectori coliniari, adică $M_0M \times \overline{a} = \theta$. Obţinem aşadar:

$$(\overline{r} - \overline{r_0}) \times \overline{a} = \theta \tag{2}$$

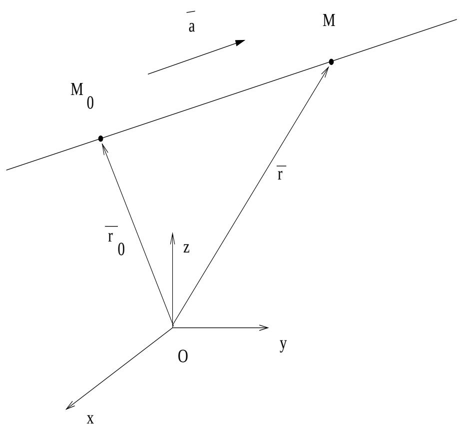

Figure 1: Dreapta determinată de un punct şi vectorul director

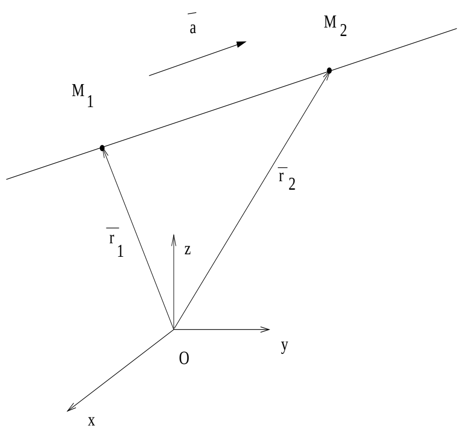

Figure 2: Dreapta determinată de două puncte

numită *ecuaţia vectorială a dreptei ce trece prin punctul* $M_0(\overline{r_0})$ *şi are vector director* $\overline{a}$.

Ecuaţia (1) se numeşte ecuaţia generală vectorială a dreptei.

Observaţie. Din coliniaritatea vectorilor $\overline{M_0M}$ şi $\overline{a}$, scrisă sub forma: $\overline{M_0M} = \lambda\overline{a}$ se obţine *ecuaţia vectorială parametrică a dreptei care trece prin punctul* $M_0(\overline{r_0})$ *şi are direcţia* $\overline{a}$:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \lambda\overline{a}. \tag{3}$$

Exprimând în reperul cartezian vectorii:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k} \\ \overline{r} &= x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} \\ \overline{r}_0 &= x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k} \end{aligned} \tag{4}$$

ecuaţia (3) se scrie echivalent:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda l \\ y &= y_0 + \lambda m \\ z &= z_0 + \lambda n \end{aligned} \tag{5}$$

Ecuaţiile (5) mai pot fi scrise:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{6}$$

numite *ecuaţiile canonice ale dreptei.*

1.2 Ecuaţia dreptei care trece prin două puncte

Se consideră două puncte $M_1(\overline{r_1})$ şi $M_2(\overline{r_2})$ pe dreapta d.

Alegem $\overline{a} = \overline{M_1M_2} = \overline{r_1} - \overline{r_2}$.

Ecuaţia dreptei se scrie:

$$d : (\overline{r} - \overline{r_1}) \times (\overline{r_2} - \overline{r_1}) = \theta \tag{7}$$

şi poartă numele de *ecuaţia vectorială a dreptei care trece prin punctele* M_1 *şi* M_2.

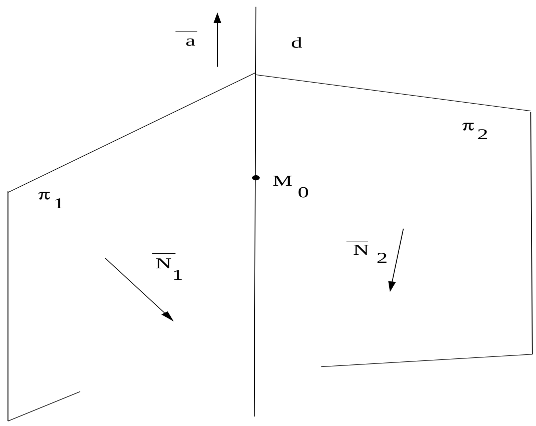

Figure 3: Dreapta determinată de două plane

Observaţie. *Dacă punctele sunt date prin coordonatele lor:* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *atunci ecuaţia dreptei se scrie:*

$$d : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{8}$$

1.3 Dreapta ca intersecţie de două plane

Se dau două plane care se intersectează după o dreaptă d*:*

$$\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{N_1} = \alpha_1 \quad \text{şi} \quad \pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{N_1} = \alpha_2$$

Deoarece dreapta d *este perpendiculară pe normalele la cele două plane:* $d \perp \overline{N_1}$ *şi* $d \perp \overline{N_2}$*, alegem ca vector director al dreptei, vectorul* $\overline{a} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$.

Dacă M_0 *este un punct al dreptei atunci:* $\overline{r_0} \cdot \overline{N_1} = \alpha_1$ *şi* $\overline{r_0} \cdot \overline{N_2} = \alpha_2$.

Atunci:

$$d : (\overline{r} - \overline{r_0}) \times (\overline{N_1} \times \overline{N_2}) = \theta \Leftrightarrow \overline{r} \times (\overline{N_1} \times \overline{N_2}) = \overline{r_0} \times (\overline{N_1} \times \overline{N_2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{r} \times (\overline{N_1} \times \overline{N_2}) = (\overline{r_0} \cdot \overline{N_2}) \cdot \overline{N_1} - (\overline{r_0} \cdot \overline{N_1}) \cdot \overline{N_2}$$

Se obţine ecuaţia dreptei:

$$d : \overline{r} \times (\overline{N_1} \times \overline{N_2}) = \alpha_2 \cdot \overline{N_1} - \alpha_1 \cdot \overline{N_2}.$$

1.4 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie dreapta

$$d : \overline{r} \times \overline{a} = \overline{b}$$

şi punctul $M_1(\overline{r_1})$ *care nu aparţine dreptei. Considerăm un punct* $M_0(\overline{r_0}) \in d \Rightarrow \overline{r_0} \times \overline{a} = \overline{b}$.

Se construieşte paralelogramul cu laturile reprezentanţii vectorilor $\overline{a}$ *şi* $\overline{M_0M_1}$.

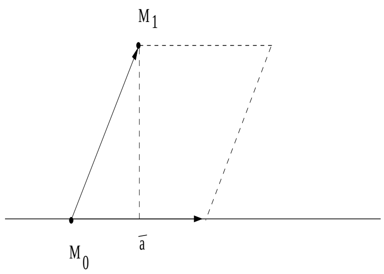

Figure 4: Distanţa de la un punct la o dreaptă

Aria acestui paralelogram este:

$$||\overline{a} \times \overline{M_0M_1}|| = d(M_1, d) \cdot ||\overline{a}|| \Rightarrow$$

$$d(M_1, d) = \frac{||\overline{a} \times \overline{M_0M_1}||}{||\overline{a}||} = \frac{||(\overline{r_1} - \overline{r_0}) \times \overline{a}||}{||\overline{a}||}$$

Obţinem aşadar:

$$d(M_1, d) = \frac{||\overline{r_1} \times \overline{a} - \overline{b}||}{||\overline{a}||}$$

1.5 Distanţa dintre două drepte paralele

Se consideră dreptele paralele:

$$d_1 : \overline{r} \times \overline{a} = \overline{b_1} \ \ \text{şi} \ \ d_2 : \overline{r} \times \overline{a} = \overline{b_2}$$

Dacă $M(\overline{r_1}) \in d_1 \Rightarrow \overline{r_1} \times \overline{a} = \overline{b_1}$.

Atunci:

$$d(d_1, d_2) = d(M_1, d_2) = \frac{||\overline{r_1} \times \overline{a} - \overline{b_2}||}{||\overline{a}||} = \frac{||b_1 - b_2||}{||\overline{a}||}$$

1.6 Poziţii relative ale dreptelor şi planelor

1.6.1 Poziţia relativă a două plane

Se dau planele

$$\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{N_1} = \alpha_1 \ \ \text{şi} \ \ \pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{N_2} = \alpha_2.$$

Atunci:

- $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} = \lambda\overline{N_2}$ *şi* $\alpha_1 = \lambda\alpha_2$;
- $\pi_1 || \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} = \lambda\overline{N_2}$ *şi* $\alpha_1 \neq \lambda\alpha_2$;
- $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Leftrightarrow \overline{N_1} \neq \lambda\overline{N_2}$.

1.6.2 Poziţia reciprocă a două drepte

Se dau planele

$$d_1 : \overline{r} \times \overline{a_1} = \overline{b_1} \quad \text{şi} \quad d_2 : \overline{r} \times \overline{a_2} = \overline{b_2}.$$

Atunci:

- $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \overline{a_1} = \lambda \overline{a_2}$ *şi* $\overline{b_1} = \lambda \overline{b_2}$;
- $d_1 || d_2 \Leftrightarrow \overline{a_1} = \lambda \overline{a_2}$ *şi* $\overline{b_1} \neq \lambda \overline{b_2}$;
- $d_1 \cap d_2 \neq \phi \Leftrightarrow \overline{a_1}\overline{b_2} + \overline{a_2}\overline{b_1} = 0.$
- d_1, d_2 *oarecare* $\Leftrightarrow \overline{a_1}\overline{b_2} + \overline{a_2}\overline{b_1} \neq 0$ *şi* $\overline{a_1} \times \overline{a_2} \neq \theta.$

Observaţie. *Punctul de intersecţie a două drepte concurente are vectorul de poziţie:*

$$\overline{r_0} = \frac{\overline{b_1} \times \overline{b_2}}{\overline{a_2} \cdot \overline{b_1}}.$$

1.6.3 Poziţia unei drepte faţă de un plan

Se dau o dreaptă d şi un plan π prin ecuaţiile:

$$d : \overline{r} \times \overline{a} = \overline{b} \quad \text{şi} \quad \pi : \overline{r} \cdot \overline{N} = \alpha.$$

Atunci:

- $d \subset \pi \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{N} = 0$ *şi* $\overline{N} \times \overline{b} + \alpha \overline{a} = \theta$;
- $d || \pi \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{N} = 0$ *şi* $\overline{N} \times \overline{b} + \alpha \overline{a} \neq \theta$;
- $d \cap \pi = \{M_0\} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{N} \neq 0.$

Observaţie. *Punctul de intersecţie dintre dreaptă şi plan are vectorul de poziţie*

$$\overline{r_0} = \frac{\overline{N} \times \overline{b} + \alpha \overline{a}}{\overline{a} \cdot \overline{N}}$$

2 Fascicul de plane

Definiţie. *Se numeşte* fascicul de plane *mulţimea planelor care trec printr-o dreaptă dată Δ, numită* axa fasciculului.

Un fascicul este definit de două plane care determină axa fasciculului, numite plane de bază.

Dacă axa Δ este dată de intersecţia planelor:

$$\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{N_1} - \alpha_1 = 0 \quad \text{şi} \quad \pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{N_2} - \alpha_2 = 0,$$

atunci ecuaţia fasciculului este:

$$\pi_\lambda : (\overline{r} \cdot \overline{N_1} - \alpha_1) + \lambda(\overline{r} \cdot \overline{N_2} - \alpha_2) = 0, \forall \lambda \in \mathbf{R}$$